ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN 12 – *Vòng 2* (2014-2015)

Thời gian: 150 phút
(NGÀY THI: 29/11/2014, lúc 13 giờ 30 phút)

PHẦN ĐẠI SỐ:

Bài 1: (4 điểm)

Cho $A=\sqrt{1+n^2+\frac{n^2}{(n+1)^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}-\frac{1}{n}$

Chứng tỏ A thuộc N với $n\in N^*$

Bài 2: (4 điểm)

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh trong một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

Bài 3: (3 điểm) Cho phương trình: $x^2+2(m+3)x+4m+8=0$ (x là ẩn, m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1;x_2$ thỏa $x_1{}^2+2x_2{}^2=3x_1x_2$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm bé hơn -1.

Bài 4: (5 điểm) Cho 3 số $x,y,z\ne 0$ thỏa: $\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=4 \end{cases}$

a) Tính: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

b) Nếu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$. Chứng minh: luôn có hai trong 3 số đối nhau.

PHẦN HÌNH HỌC:

Bài 5: (2,5 điểm) Cho hai đường tròn (O;r) và đường tròn (O';R) cắt nhau tại A, B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Vẽ tiếp tuyến CD và CE của (O) (D, E là tiếp điểm) (E nằm trong (O')). DA cắt (O') tại M, AE cắt (O') tại N. DE cắt MN tại K.

a) Chứng minh: tứ giác BKMD nội tiếp, BEKN nội tiếp.

b) Chứng minh: BK.AE = KM.BE

c) Chứng minh: $\Delta BNK \backsim \Delta ADB \Rightarrow O'K\perp MN$

Bài 6: (1,5 điểm) Cho (O;R) và điểm A nằm ngoài (O) kẻ đường thẳng (d) $\perp OA$ tại A. Lấy $M\in(d)$ bất kỳ. Vẽ tiếp tuyến MC, MB (C, B là tiếp điểm), CB cắt OM tại H, OA tại K.

a) Chứng minh: H di động trên đường cố định khi M di động trên (d).

b) Cho OA = 2R. Tìm vị trí của M để S_{MCOB} đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

❀ ❀ HẾT ❀ ❀

ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN 12 – *Vòng 2* (2014-2015)
HƯỚNG DẪN

Thời gian: 150 phút
(NGÀY THI: 29/11/2014, lúc 13 giờ 30 phút)

PHẦN ĐẠI SỐ:

Bài 1: (4 điểm)

Cho $A=\sqrt{1+n^2+\frac{n^2}{(n+1)^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}-\frac{1}{n}$

Chứng tỏ A thuộc N với $n\in N^*$

Ta có: $\sqrt{1+n^2+\frac{n^2}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(1+n^2)(n^2+2n+1)+n^2}{(n+1)^2}}$

$=\sqrt{\frac{n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)^2}$

$=\left|\frac{n^2+n+1}{n+1}\right|=\frac{n^2+n+1}{n+1}=\frac{n(n+1)+1}{n+1}=n+\frac{1}{n+1}(1)$

Ta có: $1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n^2+2n+1)+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\left|\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right|=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(2)$

Thay (1) và (2) vào A, ta được: $A=n+\frac{1}{n+1}+1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=n+1$

Mà $n\in N^*$. Nên $A\in N$

Vậy A thuộc N với $n\in N^*$

Bài 2: (4 điểm)

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh trong một tam giác. Chứng minh:

$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên a, b, c > 0 và $\begin{cases}a<b+c\\ b<a+c\\ c<a+b\end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = b + c \\ y = c + a \\ z = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-x + y + z}{2} \\ b = \dfrac{x - y + z}{2} \\ c = \dfrac{x + y - z}{2} \end{cases}$

Khi đó:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{-x+z+y}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) - 3\right] \geq \frac{1}{3}\left(2 + 2 + 2 - 3\right) = \frac{3}{2}\ (\text{Cô} - \text{si})\quad (*)$$

Áp dụng bổ đề: với $x < y;\ x, y, t > 0$ thì : $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+t}{y+t}$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c} \\ \dfrac{b}{a+c} < \dfrac{2b}{a+b+c} \\ \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2c}{a+b+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2\quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra đpcm.

<u>Bài 3:</u> (3 điểm) Cho phương trình: $x^2 + 2(m+3)x + 4m + 8 = 0$ (x là ẩn, m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2$

$a = 1;\ b = 2(m+3), b' = m + 3;\ c = 4m + 8$

$\Delta' = b'^2 - 4ac = (m+3)^2 - 1.(4m+8) = (m+1)^2 \geq 0, \forall m$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1, x_2\ \forall m$

2 nghiệm của phương trình là :

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-(m+3) + (m+1)}{1} = -2 \\ x = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-(m+3) - (m+1)}{1} = -2m - 4 \end{array}\right.$$

<u>TH1:</u> $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2m - 4 \end{cases}$ thế vào $x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2$, ta được:

$$(-2)^2 + 2(-2m-4)^2 = 3(-2)(-2m-4) \Leftrightarrow 4 + 2(4m^2 + 16m + 16) = 12m + 24$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 20m + 12 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 3 = 0 \Leftrightarrow (2m+3)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{3}{2} \\ m = -1 \end{array}\right.$$

<u>TH2:</u> $\begin{cases} x_1 = -2m - 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ thế vào $x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2$, ta được:

$$(-2m-4)^2+2(-2)^2=3(-2m-4)(-2)\Leftrightarrow(4m^2+16m+16)+8=12m+24$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+4m=0\Leftrightarrow 4m(m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$$

Vậy khi $m=0;-1;-\frac{3}{2}$ thì phương trình có nghiệm thỏa đề bài.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm bé hơn -1.

Do phương trình $x^2+2(m+3)x+4m+8=0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-2<-1\\x=-2m-4\end{array}\right.$

nên để phương trình có 2 nghiệm bé hơn -1 thì:

$$-2m-4<-1\Leftrightarrow 2m>-4+1\Leftrightarrow m>-\frac{3}{2}$$

Vậy khi $m>-\frac{3}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm bé hơn -1

<u>Bài 4:</u> (5 điểm) Cho 3 số $x,y,z\neq 0$ thỏa: $\begin{cases}x+y+z=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=4\end{cases}$

a) Tính: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Ta có: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2.\frac{x+y+z}{xyz}$$

mà $\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=4-\frac{1}{xyz}\\ x+y+z=\frac{1}{2}\end{cases}$

nên $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4-\frac{1}{xyz}+2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{xyz}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-2\end{array}\right.$

b) Nếu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$. Chứng minh: luôn có hai trong 3 số đối nhau.

Vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$ nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Mà $x+y+z=\frac{1}{2}$.

Nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}\Leftrightarrow\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x+(y+z)}\Leftrightarrow\frac{yz+x(y+z)}{xyz}=\frac{1}{x+(y+z)}$

$$\Leftrightarrow[yz+x(y+z)][x+(y+z)]=xyz\Leftrightarrow xyz+yz(y+z)+x^2(y+z)+x(y+z)^2=xyz$$

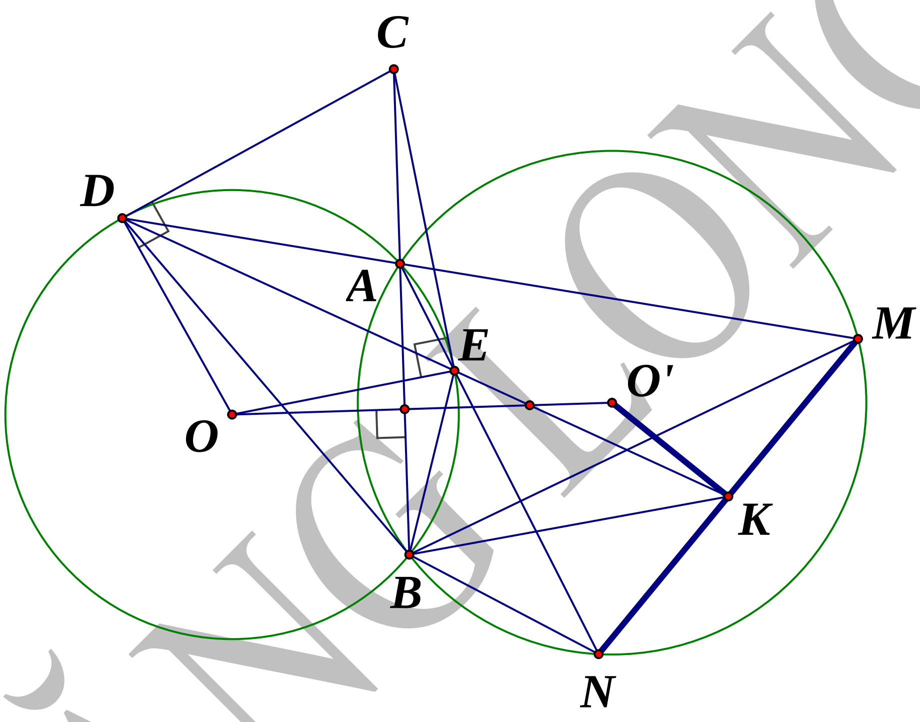
$$\Leftrightarrow (y+z)(yz+x^2+xy+xz)=0 \Leftrightarrow (y+z)(z+x)(x+y)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-z \\ z=-x \\ x=-y \end{array}\right.$ Vậy ta có điều phải chứng minh.

PHẦN HÌNH HỌC:

Bài 5: (2,5 điểm)

Cho hai đường tròn (O;r) và đường tròn (O';R) cắt nhau tại A, B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Vẽ tiếp tuyến CD và CE của (O) (D, E là tiếp điểm) (E nằm trong (O')). DA cắt (O') tại M, AE cắt (O') tại N. DE cắt MN tại K.



a) Chứng minh: tứ giác BKMD nội tiếp, BEKN nội tiếp.

Ta có:

$\begin{cases} \widehat{BMK}=\widehat{BAN} \text{ (2 gnt cùng chắn BN của (O'))} \\ \widehat{BDK}=\widehat{BAN} \text{ (2 gnt cùng chắn BE của (O))} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMK}=\widehat{BDK}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BDMK nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới hai góc bằng nhau)

Ta có:

$\begin{cases} \widehat{DAB}=\widehat{DEB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn DB của (O))} \\ \widehat{DAB}=\widehat{MNB} \text{ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác BAMN nội tiếp)} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{DEB}=\widehat{MNB} \Rightarrow \widehat{DEB}=\widehat{KNB}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BEKN nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong đối diện)

b) Chứng minh: BK.AE = KM.BE

Ta có: $\begin{cases} BKM + BKN = 180^0 \left(2 \text{ góc kề bù}\right) \\ BEA + BEN = 180^0 \ \left(2 \text{ góc kề bù}\right) \\ BKN = BEN \ \left(2 \text{ góc nội tiếp cùng chắn BN của } \left(BEKN\right)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow BKM = BEA$

Xét ΔBKM và ΔBEA, ta có: $\begin{cases} BKM = BEA \ \left(\text{cmt}\right) \\ BMK = BAE \ \left(2 \text{ góc nội tiếp cùng chắn BN của } \left(ABNM\right)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BKM \backsim \Delta BEA \left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{BK}{BE} = \dfrac{KM}{AE} \left(\text{tsđd}\right) \Rightarrow BK.AE = KM.BE$

c) Chứng minh: $\Delta BNK \backsim \Delta ADB \ \Rightarrow O'K \perp MN$

Xét ΔCDA và ΔCBD, ta có:

$\begin{cases} CDA = CBD\left(\text{góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn BN của (O)}\right) \\ C \text{ chung} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CBD \ \left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CD}$

Chứng minh tương tự: $\Delta CEA \backsim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CA}{CE}$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CD} \ \left(\text{cmt}\right) \\ \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CA}{CE} \ \left(\text{cmt}\right) \\ CD = CE \ \left(\text{tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại C của } \left(O\right)\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{AE}{BE}$

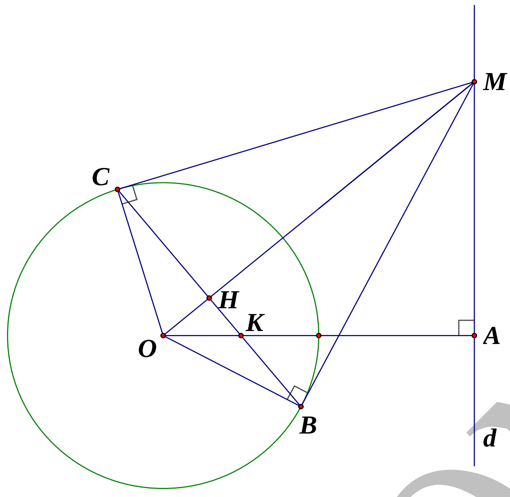
Xét ΔBNK và ΔADB, ta có: $\begin{cases} BNK = DAB \ \left(\text{tứ giác ABNM nội tiếp}\right) \\ BKN = ADB \ \left(\text{tứ giác BKMD nội tiếp}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BNK \backsim \Delta BAD \ \left(g-g\right) \ \Rightarrow \dfrac{KN}{AD} = \dfrac{BK}{BD} \ \left(\text{tsđd}\right) \Rightarrow \dfrac{KN}{BK} = \dfrac{DA}{DB}$

Mặt khác : $\Delta BKM \backsim \Delta BEA \left(\text{cm câu b}\right) \ \Rightarrow \dfrac{KM}{AE} = \dfrac{BK}{BE} \ \left(\text{tsđd}\right) \Rightarrow \dfrac{KM}{BK} = \dfrac{AE}{BE}$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{KN}{BK} = \dfrac{DA}{DB} \ \left(\text{cmt}\right) \\ \dfrac{KM}{BK} = \dfrac{AE}{BE} \ \left(\text{cmt}\right) \\ \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{AE}{BE} \ \left(\text{cmt}\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{KN}{BK} = \dfrac{KM}{BK} \Rightarrow KN = KB \Rightarrow$ K là trung điểm của MN $\Rightarrow O'K \perp MN.$

Bài 6: (1,5 điểm)
Cho (O;R) và điểm A nằm ngoài (O) kẻ đường thẳng (d) $\perp OA$ tại A. Lấy $M \in (d)$ bất kỳ. Vẽ tiếp tuyến MC, MB (C, B là tiếp điểm), CB cắt OM tại H, OA tại K.



a) Chứng minh: H di động trên đường cố định khi M di động trên (d).

Gọi K là giao của BC và OA

Chứng minh được: $\Delta OHK \backsim \Delta OAM\ (g-g) \Rightarrow \frac{OK}{OM} = \frac{OH}{OA}\ (tsđd) \Rightarrow OK.OA = OH.OM$

mà $OH.OM = OC^2 = R^2$ nên $OK.OA = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OA}$

Mặt khác: R, OA không đổi (do O, A cố định) Nên OK không đổi $\Rightarrow$ K cố định

Chứng minh được: $OHK = 90^0 \Rightarrow$ H di động trên đường tròn đường kính OK cố định

b) Cho OA = 2R. Tìm vị trí của M để S_{MCOB} đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

$S_{MCOB} = 2S_{MOC} = 2.\frac{1}{2}.OC.CM = R.CM$

Để S_{MCOB} nhỏ nhất thì CM nhỏ nhất (vì R không đổi) $\Leftrightarrow OM_{min}\ \left(\text{vì } R^2 + CM^2 = OM^2\right)$

Mà $OM \geq OA$ (Quan hệ đường xiên đường vuông góc). Vậy $OM_{min} \Leftrightarrow OM = OA \Leftrightarrow M \equiv A$

Do đó: $CM^2 = OM^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow CM = R\sqrt{3}$

Do đó: $S_{MCOB} = R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$ (đơn vị diện tích)

Vậy khi $M \equiv A$ thì $S_{MCOB}\ min = R^2\sqrt{3}$

❀ ❀ HẾT ❀ ❀